フラクタルって何だろう

1988年　ダイヤモンド社

高安　秀樹　(たかやす　ひでき)
名古屋大学理学部物理学科卒　理学博士
神戸大学理学部地球学科　助教授
ボストン大学物理学科　客員研究員

高安　美佐子　(たかやす　みさこ)
名古屋大学理学部物理学科卒
ボストン大学物理学科　客員研究員

感覚から科学へ

まだまだ未解決の問題が沢山あり、それらのいくつかを見渡してみると、「複雑さ」が共通の性質として浮かび上がってくる。私たちは、ある形を見たときに、それが単純であるとか、あるいは複雑であると感じるような感覚を持っている。さらに、二つの複雑な形が与えられたとき、どちらがより複雑であるかを決めるようなこともできる。しかし、直感的には簡単でも、その感覚を客観的に表現しようとすると、意外と難しい。

感覚を定量化することができれば、その量は自然のある性質を表わす量として客観的な科学の対象となりうる。自然界の複雑さを科学的に解明しようとするならば、まず、複雑さを定量化することを第一に試みるべきである。そのためには、「熱さ」を定量化したときの温度計の役目をするような、なんらかの複雑さを測る道具、あるいは、方法を見つけ出さなければならない。つまり、「熱さ」と水銀の体積の変化量の場合のように、複雑さとある程度の相関関係を持つような数値を考え出す必要がある。

人間は、物の形や構造を見ただけで、それが複雑かどうかを感じることができる。それゆえ、複雑さを測る量も、形や構造から直接導かれるような幾何学的な量のはずである。しかし、そうは言っても、そのような量をいきなり思いつくのはほとんど不可能である。私たちが複雑だと感じるような形を、たとえば、煙草の煙、リアス式海岸、植物、スポンジ、……と列挙してみても、じつにバラエティに富んでおり、どこから手をつけていいのか見当もつかない。そのようなとき、一番着実で賢明な方法は、最も典型的と思われる複雑な形を選び出し、それについての性質を具体的に細かに調べてみることである。うまくいけば、そこで得られた性質の中から一般の複雑な形に共通する性質を見つけ出すことができるかもしれない。

フラクタルとは

コッホ曲線、シルピンスキーのギャスケットなどのように任意の部分を拡大すると、もとと同形になっている図形を「自己相似な図形」という。観測する倍率を変えても同じように見えるという性質は、日常的な感覚からするとたいへん特異に感じられる

かもしれない。これらの図形はどれも今世紀初頭、名を冠した数学者たちがきわめて例外的な、病気関数と分類されるような分野の研究の成果として考え出したものである。これらは、最近まであまり注目されることがなかった。たいへん特殊で、実用的価値などがあるなどとは、誰も思わなかったからである。
しかし、マンデルブロは、ひとり、その重要性に目をつけた。これらの図形に共通する性質、自己相似性こそが複雑な図形を扱うための最も基本的な性質であると見抜いたのである。彼にとってはこれらの形はけっして特殊でも病的でもなかった。むしろ、これらがきわめて自然なありふれたものに見えたのである。1975年、彼は、自己相似性を有する複雑な図形を、＜フラクタル＞という名で総称することを提案した。

フラクタル次元

次元とは空間や構造の任意の点を指定するのに必要な独立な変数の数、つまり空間の自由度という意味で用いられることが多い。フラクタル図形の特徴である、自己相似性に基づいて次元の意味を考えてみると、「次元がDであるような図形は一辺を二等分すると、もとと相似な図形が2^D個生まれる」ということになる。したがって次元の定義は次のようになる。
「今、ある図形が与えられたとする。もしも、その図形の一辺を二等分してみたところ、もとと相似な図形が2^D個得られたとする。そのときその図形の次元をDであると定義する。」
さらに次元の定義をもう少し一般化すると、「全体を1/aに縮小した相似図形a^D個によって全体が構成されているとき、その図形の次元はDである」
これは、対数を用いれば次のように言い換えることもできる。
「全体を1/aに縮小した相似図形b個によって全体が構成されているとき、その図形の次元Dは次の公式によって与えられる。」

$$D = \log_a b \ (= \log b / \log a)$$

この一般化された定義に従ってコッホ曲線の次元を調べてみよう。コッホ曲線は、全体を1/3に縮小した相似形四個から全体ができている。この場合、公式のaに3を、bに4を代入することによって次元が得られる。次元の値は、電卓を使って計算してみればわかるように、

$$D = \log_3 4 = 1.2618\cdots\cdots$$

となる。つまり、コッホ曲線は約1.26次元の構造である。
この例からわかるように、非整数の次元という従来の常識を超えた概念はフラクタル図形を考えることによって現実のものとなる。このような非整数までに拡張された次元は、＜フラクタル次元＞とよばれている。
シルピンスキーのギャスケットのように無限の長さを有限の大きさの中に折り畳む。そんな手品のようなことがフラクタルでは実現している。これがフラクタル構造が私たちに奇妙な印象を与える最大の原因だろう。私たちにとってなじみの深い形、円や

正方形などの図形にはこのような性質は全くなかったからである。しかし、フラクタルの世界では長さが無限大、面積が0などという図形は日常茶飯事である。というのは、フラクタル次元が1と2の間の値を取るような図形は、すべてそのような性質を持つことが知られているからである。

自然界への適用

木々の枝の形のひとつを例にしてみてもわかるように、自然界に存在する複雑な構造は、似かよって見えるが、どれとして全く同じ形のものはない。それに対し、コッホ曲線やシルピンスキーのギャスケットは、複雑ではあるが、完全に規則的な図形で、それらを個別に特徴づけるような確率的ランダムさはない。このことからもわかるように、複雑さとランダムさとは別物なのである。それならば、本質的に複雑さを持ち合わせているフラクタルにランダムさを加えることができれば、さらに多様な複雑さを表現できるようになり、自然界の現象に一歩近づけるかもしれない。
部分を拡大した図形が全体の図形と同じように見える。これは、ある種の自己相似性であると言ってもよいだろう。しかし、この自己相似性はコッホ曲線のときのような完全なものではない。完全な自己相似性ならば、拡大した図形が元の図形とぴたりと重なるはずだが、そうはならないからである。
拡大して見ても、もととおおよそ同じように見える性質を「統計的に自己相似である」という。同じように見える、という言い方は曖昧な表現であるが反例である自己相似でないものを考えてみるとその意味がはっきりする。
自己相似という概念を統計的なものにまで拡張すると、その適用範囲はきわめて大きく広がる。何か一つの複雑な構造が与えられたとき、その一部分を拡大してみて、拡大されたものと全体とを比較した結果、両者が同じような構造に見えるならば、その構造は統計的に自己相似であるということになる。そのとき与えられる構造は、人工的なものであろうと自然のものであろうとかまわない。そのような統計的な自己相似性を持つものは、「統計的なフラクタル」あるいは単に、フラクタルと呼ばれている。
さて、フラクタルという概念をランダムさを持った統計的なものにまで拡張することはできたが、それでは、そういうフラクタル構造に対してフラクタル次元を定義するにはどうしたらよいだろう。せっかく導入した統計的なフラクタルという概念も、それを数値によって特徴づけることができないならば、重要性は半減してしまう。
まず、完全な自己相似性を持つものに対するフラクタル次元の定義を思い出してみよう。それは、縮小率aと全体を構成するのに必要な1/aに縮小した図形の数bから定義することができた。扱う対象が統計的な性質を持つ場合には、この定義をそのまま使うことはできないが、次のようにすれば自然な拡張になることがわかる。
「全体の構造を分割し、分割されたそれぞれの差し渡しが全体の1/aになるようにしたとき、おのおのの部分が全体と統計的に相似であり、それらの個数が平均b個であるとき、全体の構造のフラクタル次元は次式によって与えられる。」

$$D = \log_a b$$

さて、ようやく自然界の複雑な構造を解析するための準備ができた。手順を要約すると、次のようになる。

(1) 与えられた構造の部分を拡大したものが、全体と同じように見えるかどうかを確かめ、その構造がフラクタルであるかどうかを確認する。

(2) 差し渡しが何分の一のものが平均何個集まって全体を構成しているかを調べ、フラクタル次元を公式により求める。

この二つを調べれば、ある構造の複雑さを特徴づけたことになる。

物理学とフラクタル

東洋には西洋の思想とは対照的な仏教的世界観が育まれた。そしてその世界観は、驚いたことに、たいへんフラクタルの根本思想と類似性がある。
。たとえば、密教的世界観の表現であるマンダラがそのことを如実に示している。
マンダラは大小さまざまな円を入れ子構造に組み合せたフラクタル的な構造になっている。つまり部分が全体の縮図であるという考えは、じつは身近な私たちの文化の中にあった思想である。しかし、東洋的思想は非科学的であると思われがちであり、西洋的な対称性を求めた考え方が主流の現代科学において、フラクタルのような自然現象の複雑さをそのまま理解しようとする思考の発展が妨げられていたことも事実である。そして、私たちは今日に至り、大きなスケールの極限と小さなスケールの極限の間のスケール、つまり、私たちの身の回り程度のスケールの現象が物理としてまだほとんど手がつけられていないことを再認識したのである。
物理学が扱う対象は、素粒子の10^{-16}mから、宇宙の10^{26}mのおよそ40桁の範囲にある。そして、量子力学、統計力学、古典力学、一般相対論などには、それぞれの分野が得意とする守備範囲がある。電子の運動を記述するときには量子効果があるので、古典力学ではうまく説明がつかないし、多体のミクロな粒子の運動も古典力学だけでは説くことができない。やはり人間くらいのスケールの複雑な現象を扱う物理学が今まで存在しなかったことが確認できる。

秩序と無秩序

最近は、どんな職業も細かく細分化され専門化されてきている。そのため、いわゆる専門バカで自分の専門のことは誰にも負けないが、専門以外のことは単に知らないだけでなく知ろうともしないような人もいる。自分の仕事が忙しければある程度は止むを得ないことかもしれないが、自分の専門以外のことを無駄なものとして排除することは、自分の内的な揺らぎを切り捨てていることだということを忘れてはならない。
ある程度の間は無駄を省いた分だけ能率が上がったように見えるかもしれないが、いずれ時代の流れなどの影響で環境が変わったときにうまく適応できず取り残されることになる。自分の中にどれだけの揺らぎがあるか、どれだけ広いことに関心を持って

いるか、ということがその人の活力や健全さを測る指標になる。ことに現在のように世界の情報が一瞬のうちに伝わり、次から次へと新しい科学技術が開発され応用されている時代には柔軟な適応力が要求されるので、秩序を失わないぎりぎりまで無秩序を抱え込むことが必要かもしれない。
フラクタルは細分化された今日の科学の中ではきわめて異例の立場にある。フラクタルの理論という新しい専門分野が構築されたと見るよりは、むしろ、分野間の垣根を取り払い、これまでにバラバラに各専門分野で研究されていた複雑な現象を、統一的な立場から縦横無尽に現象を解析することを可能にしたことに大きな意義がある。
各専門の研究を進めることは学問としての秩序を高めることになる。科学がいたるところで秩序だってきて硬化しかかっていたところに、フラクタルな横断的なものの見方、すなわち内的な揺らぎを与えたのである。学問としての科学の中では、フラクタルの理論自身が秩序と無秩序の狭間、すなわちフラクタル的な状態に位置しているのかもしれない。